III.D Théorème de Perron-Frobenius et application aux chaînes de Markov

Lemme 34:

On a les encadrements suivants pour le rayon spectral de A :

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

De plus, S'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif et α, β dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x$[resp. $\alpha x < Ax < \beta x$], on a alors $\alpha \leqslant \rho(A) \leqslant \beta$ [resp. $\alpha < \rho(A) < \beta$].

Démonstration. Pour le premier point, on peut écrire :
On sait déjà que $\rho(A) \leqslant |||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$. On note $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\alpha = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\alpha_i)$. Pour $\alpha = 0$, le résultat est évident. Pour $\alpha > 0$, on a $\alpha_i > 0$ pour tout i et la matrice $B = \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_i}a_{i,j}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est telle que $0 \leqslant B \leqslant A$, $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \alpha$ pour tout i compris entre 1 et n, ce qui nous donne $\alpha = \rho(B) \leqslant \rho(A)$.
En raisonnant avec ${}^tA$, considérant que $\rho({}^tA) = \rho(A)$ et$\|{}^tA\|_\infty = |||A|||_1$, on obtient le deuxième encadrement.

Pour le second point, l'encadrement $\alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x$ équivaut à $\alpha x_i \leqslant (Ax)_i \leqslant \beta x_i$ pour tout i compris entre 1 et n, ce qui entraîne :

$$\alpha \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i} \leqslant \beta.$$

On procède de même pour les inégalités strictes. ■

Lemme 35:

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre non nul associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Dans ce cas, $\rho(A)$ est valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé, ce vecteur étant strictement positif et il existe un réel θ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.

Démonstration. On a $\rho(A) > 0$ du fait que $A > 0$ par le premier point du lemme précédent. De $Ax = \lambda x$ avec $|\lambda| = \rho(A)$, on déduit que $\rho(A)|x| = |Ax| \leqslant |A||x| = A|x|$,donc $y = A|x| - \rho(A)|x|$ est positif. Si ce vecteur est non nul, on a alors $Ay > 0$ car A est strictement positive. En effet, pour un certain k on a alors $y_k > 0$ et il en résulte alors que pour tout i, comme A est strictement positive et y est positif, on a :

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j \geqslant a_{i,k}y_k > 0.$$

Ceci signifie qu'en notant $x' = A|x|$, on a $\rho(A)x' < Ax'$ avec $x' > 0$ (le vecteur x est non nul en temps que vecteur propre) qui entraîne que $\rho(A) < \rho(A)$ par le deuxième point du lemme précédent. C'est impossible. On a donc $y = 0$, ou $A|x| = \rho(A)|x|$, ce qui signifie que $\rho(A)$ est valeur propre de A avec $|x|$ comme vecteur propre associé. En écrivant que $|x| = \frac{1}{\rho(A)}A|x|$, on déduit que $|x| > 0$. De plus :

$$A|x| = \rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax|,$$

c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

Il s'agit d'un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, donc tous les $a_{i,j}x_j$ ont le même argument. Ainsi il existe $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,n]\!] \qquad a_{k,j}x_j = e^{i\theta_k}a_{k,j}|x_j|.$$

En simplifiant par $a_{k,j}$ des deux côtés de l'égalité (on peut le faire car $A > 0$), on a :

$$x = e^{i\theta}|x|.$$

■

Théorème 36: Perron-Frobenius

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive. Alors :

(i) $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximum ;

(ii) l'espace propre associé à $\rho(A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif ;

(iii) $\rho(A)$ est valeur propre simple de A.

Démonstration. (i) Si λ est une valeur propre de la matrice A telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et si x est un vecteur propre non nul associé, on a alors $x = e^{i\theta}|x|$ avec $A|x| = \rho(A)|x|$. Le rayon spectral $\rho(A)$ est donc valeur propre de A. De plus, avec :

$$\lambda x = Ax = A\left(e^{i\theta}|x|\right) = e^{i\theta}A|x| = e^{i\theta}\rho(A)|x| = \rho(A)x$$

on déduit que $\lambda x = \rho(A)x$ avec $x \neq 0$, et $\lambda = \rho(A)$.

Donc $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

(ii) En notant $E_{\rho(A)}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$, tout vecteur non nul x dans $E_{\rho(A)}$ est tel que $|x| > 0$ par le lemme précédent, et aucune des composantes de x n'est nulle. S'il existe deux vecteurs x, y linéairement indépendants dans $E_{\rho(A)}$, le vecteur $z = x_1y - y_1x$ est alors non nul (linéaire indépendance) et dans $E_{\rho(A)}$ avec $z_1 = 0$, ce qui est exclus. On a donc que x et y sont linéairement dépends. Comme ils sont quelconques dans $E_{\rho(A)}$, on en conclut $\dim\left(E_{\rho(A)}\right) = 1$; et donc $E_{\rho(A)} = \mathrm{Vect}(\,|x|\,)$

(iii) Pour $n = 1$, il est clair que $\rho(A)$ est valeur propre simple de A. On suppose donc que $n \geqslant 2$. Si la multiplicité (algébrique) de $\rho(A)$ comme valeur propre de A est $m \geqslant 2$, alors en se donnant un générateur $x > 0$ de l'espace propre $E_{\rho(A)}$ (de multiplicité géométrique 1), il existe $y \in \mathbb{C}^n$ linéairement indépendant de x tel que $Ay = x + \rho(A)y$ (la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho(A) & 1 & \\ 0 & \rho(A) & 0 \\ & 0 & B \end{pmatrix}$$

En notant $\overline{y}$ le vecteur conjugué de y dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$A\overline{y} = \overline{Ay} = \overline{x + \rho(A)y} = x + \rho(A)\overline{y}$$

puisque A et x sont réels.
Le vecteur $z = \frac{1}{2}(y + \overline{y}) = \Re(y)$ est alors réel et $Az = x + \rho(A)z$.
Comme $x > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $v = z + \alpha x > 0$. Alors :

$$Av = Az + \alpha Ax = x + \rho(A)z + \alpha\rho(A)x = x + \rho(A)v > \rho(A)v.$$

Ceci nous donne $\rho(A) > \rho(A)$ par le second point du premier lemme technique précédent. C'est impossible. Donc $\rho(A)$ est valeur propre simple de A.

■

Application 37

Si (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition ergodique (i.e. $\exists n \in \mathbb{N} \quad P^n > 0$), alors il existe une unique loi invariante :

$$\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_N^*)$$

(i.e. $\pi^* P = \pi^*$) et

$$P^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P^\infty = \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}$$

et pour toute mesure de probabilité $\pi^{(0)}$ la suite des itérées $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$ converge vers π^*.

Démonstration. Comme $P^n > 0$ et que $\rho(P) = 1$, il existe une probabilité invariante π pour P^n. Mais π est aussi une probabilité invariante pour tout $k \geqslant n$ puisque

$$P^{n+1} = PP^n = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_N \end{pmatrix} = (L_i C_j)_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}$$

et $C_j > 0$ pour tout $j \in [\![1, N]\!]$ et $\sum_j L_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$. Par Perron-Frobenius. L'espace propre de P^n associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Mais $Px = x$ entraîne $P^n x = x$. Donc $E_1(P) \subseteq E_1(P^n)$. De plus, $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Donc $E_1(P) = E_1(P^n)$.
On écrit alors la décomposition de Jordan de P :

$$P = Q \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

avec $|\lambda_i| < 1$ car $\rho(P) = 1$.
Donc on a

$$P^k \longrightarrow P^\infty = Q \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Donc P^∞ est stochastique et de rang 1. Il en résulte que l'on peut écrire :

$$P^\infty = \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}$$

où π^* est une mesure de probabilité.

Ceci équivaut à $P^\infty = \mathbf{1} \cdot \pi^*$. Il s'en suit :

$$\pi^* P^\infty = \pi^* \mathbf{1} \pi^* = \pi^*$$

car $\pi^* \mathbf{1} = \sum_i \pi_i^* = 1$ puisque P^∞ est stochastique.

Mais $P^\infty = PP^\infty$. Donc :

$$\pi^* = \pi^* P^\infty = \pi^* P^\infty P = \pi^* P.$$

D'où, comme la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est 1, π^* est l'unique mesure invariante qui soit une mesure de probabilité.

Enfin, soit $\pi^{(0)}$ une mesure de probabilité quelconque, $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n \longrightarrow \pi_0 P^\infty = \pi_0 \mathbf{1} \pi^* = \displaystyle\sum_{j=1}^N \pi_j^{(0)} \pi^*$.

Or $\pi^{(0)}$ est une mesure de probabilité. Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^N \pi_j^{(0)} = 1$ et $\pi^{(n)} \longrightarrow \pi^*$. ■